数理解析研究所講究録
第 1756 巻 2011 年 22-31

複素球面上のデザインとコード

東北大学大学院情報科学研究科　須田庄 (Sho Suda)
Graduate School of Information and Sciences
Tohoku University

1 序

1977 年, Delsarte, Goethals, Seidel は実球面上の空でない有限部分集合に対してデザインの概念を定義した. この概念は Q-多項式スキームにおけるデザインの実球面での類似であり, ランク 1 のコンパクト対称空間でもデザインの概念が導入されている. 本稿ではランク 2 のコンパクト対称空間である複素球面に対してデザインの概念を定義し, 複素球面上でのデルサルト理論を構築することを目標とする. 本稿で述べられていない証明については [11] を参照されたい. 本研究は Waterloo 大学の Aidan Roy との共同研究に基づく.

2 Harmonic analysis

本稿で用いる記号とデザイン論を論じるために必要な複素球面上の調和解析について触れておく. $\Omega(d)$ と書いたら複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^d$ の単位球面を表すとする. $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ に対して, $\mathrm{Hom}(k,l)$ を多項式環 $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d,\bar{z_1},\ldots,\bar{z_d}]$ の $\{z_1,\ldots,z_d\}$ に関して k 次, $\{\overline{z_1},\ldots,\overline{z_d}\}$ に関して l 次の多項式で, 定義域を $\Omega(d)$ に制限したものからなる集合とする. このとき $z=(z_1,\ldots,z_d)\in\Omega(d)$ に対して $\sum_{i=1}^{d} z_i\overline{z_i}=z^*z=1$ であるので, $\mathrm{Hom}(k,l)$ は $\mathrm{Hom}(k+1,l+1)$ に含まれる. ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(k,l)$ は次の作用でユニタリー群 $U(d)$ の表現となる: $U\in U(d)$, $f\in\mathrm{Hom}(k,l)$ に対して, $(Uf)(z):=f(U^*z)$ とする. この表現は次のように既約分解される:

$$\mathrm{Hom}(k,l)=\bigoplus_{i=0}^{\min\{k,l\}}\mathrm{Harm}(k-i,l-i),$$

ここで $\mathrm{Harm}(k,l)$ は $\mathrm{Hom}(k,l)$ の部分集合でラプラス作用素 $\Delta=\sum_{i=1}^{d}\partial^2/\partial z_i\partial\overline{z_i}$ で 0 になる多項式からなる. 容易に分かることとして, $\dim(\mathrm{Hom}(k,l))=\binom{d+k-1}{d-1}\binom{d+l-1}{d-1}$ から $\dim(\mathrm{Harm}(k,l))=\binom{d+k-1}{d-1}\binom{d+l-1}{d-1}-\binom{d+k-2}{d-1}\binom{d+l-2}{d-1}$ が従う. $\dim(\mathrm{Harm}(k,l))$ を $N_{k,l}$ と書くこととする.

次に $\Omega(d)$ 上の二乗可積分関数 f, g に対して内積を次のように定義する:

$$\langle f,g\rangle=\int_{\Omega(d)}\overline{f(z)}g(z)\,\mathrm{d}z.$$

ここで dz は $\int_{\Omega(d)}$ dz $= 1$ となるように正規化されたハール測度である. 相異なる $(k,l),(k',l')$ に対して, この内積に関して $\mathrm{Harm}(k,l)$ は $\mathrm{Harm}(k',l')$ と直交することが分かる.

各 $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ に対して, 多項式 $g_{k,l}$ を次で定義する:

$$g_{k,l}(x) = \frac{d+k+l-1}{(d-1)!} \sum_{r=0}^{\min\{k,l\}} (-1)^r \frac{(d+k+l-r-2)!}{r!(k-r)!(l-r)!} x^{k-r}\overline{x}^{l-r}.$$

各 $a \in \Omega(d)$ に対して, 次の関数

$$g_{k,l,a} : z \mapsto g_{k,l}(a^* z)$$

は $\mathrm{Harm}(k,l)$ の元である. 従って $g_{k,l,a}$, $g_{k',l',a'}$ は $(k,l) \neq (k',l')$ であれば直交する. $g_{k,l,a}$ は $\mathrm{Harm}(k,l)$ に対する zonal orthogonal polynomial と呼ばれる.

多項式 $g_{k,l}(z)$ を $g_{k,l}(1) = \dim(\mathrm{Harm}(k,l))$ となるように正規化しておくと, 次の漸化式が成立つ:

$$x g_{k,l}(x) = a_{k,l} g_{k+1,l}(x) + b_{k,l} g_{k-1,l}(x),$$

但し $a_{k,l} = \frac{k+1}{d+k+l}$, $b_{k,l} = \frac{d+l-2}{d+k+l-2}$ である.

次の定理は $g_{k,l}(z)$ に対する加法公式として知られ, デザインの特徴付けでも用いられる本質的な性質である.

Theorem 2.1. $\{e_1, \ldots, e_{N_{k,l}}\}$ を $\mathrm{Harm}(k,l)$ の正規直交基底とする. このとき任意の $a, b \in \Omega(d)$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{N_{k,l}} \overline{e_i(a)} e_i(b) = g_{k,l}(a^* b).$$

加法公式から $g_{k,l,a} = \sum_{i=1}^{N_{k,l}} \overline{e_i(a)} e_i$ が従い, 更に内積を取ることで $\langle g_{k,l,a}, e_i \rangle = e_i(a)$ となる. よって任意の $p \in \mathrm{Harm}(k,l)$ に対して,

$$\langle g_{k,l,a}(x), p(x) \rangle = p(a).$$

このことは $\mathrm{Harm}(k,l)$ での双対写像が a での値となるような $\mathrm{Harm}(k,l)$ での唯一の元として $g_{k,l,a}$ が特徴づけられることを意味する. このことから直ちに従うこととして, $\{x \mapsto g_{k,l}(a^* x) : a \in \Omega(d)\}$ は $\mathrm{Harm}(k,l)$ を生成することが分かる. 更には $g_{k,l}(z)$ は次の正定値に関する性質を有することも分かる: 任意の部分集合 $X \subseteq \Omega(d)$ に対して,

$$\sum_{a,b \in X} g_{k,l}(a^* b) = \sum_{a,b \in X} \langle g_{k,l,b}, g_{k,l,a} \rangle = \left\langle \sum_{b \in X} g_{k,l,b}, \sum_{a \in X} g_{k,l,a} \right\rangle \geq 0.$$

最後に $g_{k,l}(z)$ と超幾何関数 ${}_2F_1(a,b;c;z)$, もしくは Jacobi polynomial $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ との関係については次が成立つ:

$$\begin{aligned} g_{k,l}(z) &= N_{k,l} x^k \overline{x}^l {}_2F_1(-k,-l;d-1;1-\frac{1}{z\overline{z}}) \\ &= N_{k,l} \frac{l!(d-2)!}{(l+d-2)!} x^{k-l} P_l^{d-2,k-l}(2z\overline{z}-1) \\ &= N_{k,l} \frac{k!(d-2)!}{(k+d-2)!} \overline{x}^{l-k} P_k^{d-2,l-k}(2z\overline{z}-1). \end{aligned}$$

3 Complex spherical design

まずはじめに, 非負整数の組からなる集合 $\mathbb{N}^2$ に半順序 $\preceq$ を次のように定義する: $(k,l) \preceq (m,n)$ とは $k \leq m$ かつ $l \leq n$ のこととする. 半順序集合 $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ の *lower set* とは $\mathbb{N}^2$ の有限部分集合 $\mathcal{T}$ で次の性質をみたすものである: $\mathcal{T}$ の任意の元 (k,l) に対して, $(m,n) \preceq (k,l)$ となる (m,n) も $\mathcal{T}$ の元である. lower set を用いて複素球面のデザインの定義を次で与える:

Definition 3.1. X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とし, $\mathcal{T}$ を $\mathbb{N}^2$ の lower set とする. このとき X が $\mathcal{T}$-デザインであるとは, $\mathcal{T}$ の任意の元 (k,l) と任意の多項式 $f \in \mathrm{Hom}(k,l)$ に対して

$$\frac{1}{|X|} \sum_{z \in X} f(z) = \int_{\Omega(d)} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

が成立つときとする.

Remark 3.2. 実球面上のデザインは自然数 t に対して定義されるが, 複素球面上のデザインは $\mathbb{N}^2$ の lower set に対して定義されることに注意しておく.

単位球面 $\Omega(d)$ の与えられた有限部分集合 X に対して, X がデザインになっているか判定するとき, 具体的な積分の計算をすることは稀であり, 次の補題を用いるのが有効である. 以下, 各 (k,l) に対して $\mathrm{Harm}(k,l)$ の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_{N_{k,l}}\}$ を固定しておく. 特性行列 $H_{k,l}$ とは列と行がそれぞれ X の元と $\mathrm{Harm}(k,l)$ の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_{N_{k,l}}\}$ で添え字づけられ, (x,i) 成分が $e_i(x)$ となる行列である.

Lemma 3.3. X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とし, $\mathcal{T}$ を $\mathbb{N}^2$ の *lower set* とする. このとき次は同値である:

(i) X は $\mathcal{T}$-デザインである.

(ii) $(k+l', l+k') \in \mathcal{T}$ となる任意の k,l,k',l' に対して $H_{k,l}^* H_{k',l'} = |X| \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} I$ が成立つ.

(iii) $(0,0)$ でない任意の $(k,l) \in \mathcal{T}$ に対して $\sum_{x,y \in X} g_{k,l}(x^* y) = 0$ が成立つ.

定義から直ちに分かることは交わりのない $\mathcal{T}$-デザイン X_1, X_2 に対して, その合併集合 $X_1 \cup X_2$ も $\mathcal{T}$-デザインである. また $\mathcal{T}$-デザインのユニタリー変換の像も $\mathcal{T}$-デザインであることが Lemma 3.3 から分かる.

次の命題は実球面に対する Sidelnikov の定理の複素球面での類似であり, 複素球面デザインの別の特徴づけを与えるものである.

Proposition 3.4. X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とする. このとき任意の $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ に対して次の不等式が成立つ:

$$\frac{1}{|X|^2} \sum_{x,y \in X} (x^* y)^k (y^* x)^l \geq \begin{cases} \binom{d+k-1}{k-1}^{-1} & \text{if } k = l; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

更に $\mathcal{T}$ を $\mathbb{N}^2$ の *lower set* とする. このとき任意の $(k,l) \in \mathcal{T}$ に対して等号成立することと X が $\mathcal{T}$-デザインであることは同値である.

冒頭で述べたとおり実球面上のデザインはよく知られて概念であり，また実および複素射影空間上のデザインも研究されている．以下では複素球面上のデザインと実球面上、複素射影空間上のデザインとの関係を見ていく．これらのデザイン，コードについては [5], [6], [7] を参照されたい．まずはじめ実球面デザインを定義する．$\mathbb{R}^d$ の単位球面を S^{d-1} であらわすこととする．

Definition 3.5. Y を S^{d-1} の有限部分集合とし，t を自然数とする．このとき Y が t-デザインであるとは，t 次以下の任意の多項式 $f(x_1,\dots,x_d)$ に対して

$$\frac{1}{|Y|}\sum_{z\in X} f(z) = \frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

が成立つときとする．

実，複素球面デザインの関係性を見るために写像 $\phi : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^{2d}$ を次のように定義する：

$$\phi(x_1,\dots,x_d) = (\mathrm{Re}(x_1),\mathrm{Im}(x_1),\dots,\mathrm{Re}(x_d),\mathrm{Im}(x_d)).$$

このとき $\mathbb{C}^d$ の 2 点 x, y に対して，$\phi(x)^T\phi(y) = \mathrm{Re}(x^*y)$ が成立つ．これから ϕ は $\Omega(d)$ を S^{2d-1} に写すことが分かる．次の補題は実，複素球面デザインの関係を述べている．

Lemma 3.6. X を $\Omega(d)$ の $\mathcal{T}$-デザインとし，t を正整数とする．このとき次は同値である：

(i) $\mathcal{T}$ は *lower set* $\{(k,l)\in\mathbb{N}^2 : k+l\le t\}$ を含む．

(ii) S^{2d-1} の有限部分集合 $\phi(X)$ は t-デザインである．

複素射影空間上のデザインは次のように定義される：

Definition 3.7. Y を $\mathbb{C}P^{d-1}$ の有限部分集合とし，t を自然数とする．このとき Y が t-デザインであるとは，t 次以下の任意の多項式 $f\in\mathrm{Hom}(t,t)$ に対して

$$\frac{1}{|Y|}\sum_{z\in X} f(z) = \int_{\mathbb{C}P^{d-1}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

が成立つときとする．

ここで，ハール測度は $\int_{\mathbb{C}P^{d-1}}\mathrm{d}z = 1$ となるように正規化されている．$\Omega(d)$ の有限部分集合 X に対して，X の各点で張られる 1 次元部分空間からなる集合を $P(X)$ と書いて $\mathbb{C}P^{d-1}$ の部分集合とみなす．このとき次の補題が成立する．

Lemma 3.8. L を $\Omega(d)$ の有限部分集合で任意の $x,y\in L$ に対して $|x^*y|<1$ が成立つとし，X を L の *n-antipodal cover* とする．

(i) もし X が $\mathcal{T}$-デザインであれば，$P(L)$ は複素射影空間の t-デザインとなる．但し $t=\max\{k:(k,k)\in\mathcal{T}\}$ である．

(ii) もし $P(L)$ が複素射影空間の t-デザインで $n>t$ であれば，X は $\mathcal{T}$-デザインである．但し $\mathcal{T}=\{(k,l)\in\mathbb{N}^2 : k+l\le t\}$ である．

4 Complex spherical code

$(k,l) \in \mathbb{N}^2$ に対して, $\mathrm{P}(k,l)$ は $\mathbb{R}[x,\bar{x}]$ の多項式で次数が変数 x に関して高々k 次, 変数 $\bar{x}$ に関して高々l 次のものからなる集合とする. 与えられた $X \subseteq \Omega(d)$ に対して, X の *inner product set* を次で定義する:

$$A(X) = \{a^*b : a, b \in X, a \neq b\}.$$

多項式 $F(x) \in \mathbb{R}[x,\bar{x}]$ が X の *annihilator polynomial* であるとは任意の $\alpha \in A(X) \cup \{1\}$ に対して $F(\alpha) = \delta_{\alpha,1}$ が成立つときとする.

Definition 4.1. *X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とする. X が complex spherical code of degree s であるとは $|A(X)| = s$ のときとする.* Lower set $\mathcal{S}$ に対して, X が *$\mathcal{S}$-code* であるとは X のある annihilator polynomial $F(x) \in \sum_{(k,l)\in\mathcal{S}} \mathrm{P}(k,l)$ が存在するときをいう.

もし X が degree s のコードとすると, $F(x) := \prod_{\alpha\in A(X)} \frac{x-\alpha}{1-\alpha}$ は X の annihilator polynomial となり, $\mathcal{S} = \{(k,0) : k \leq s\}$ とおくことで X は $\mathcal{S}$-コードとなる. しかしながら多くのコードの例においては上で挙げた lower set とは別の (inner product set に依存した) 有用な lower set が取れることが多い. 例えば, もし inner product set の各元のノルムが $|\alpha|$ に等しかったら $F(X) = x\bar{x} - |\alpha|^2$ が annihilator polynomial となり, $\mathcal{S} = \{(k,l) : 0 \leq k, l \leq 1\}$ として X は $\mathcal{S}$-コードとなる.

5 Bounds on designs and codes

この節ではデザイン, コードの下界, 上界を与える. またそれらの tightness についても議論する. $\mathbb{N}^2$ の部分集合 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U}$ とそれ自身の convolution を次で定義する:

$$\mathcal{U} * \mathcal{U} = \{(k+l', k'+l) : (k,l), (k',l') \in \mathcal{U}\}.$$

次の bound は lower set $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ によって決まるので複素球面における absolute bound といえる.

Theorem 5.1. *(i) X を $\mathcal{T}$-デザインとする. $\mathcal{U} * \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ を満たす lower set $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ に対して次が成立つ:*

$$|X| \geq \sum_{(k,l)\in\mathcal{U}} \dim(\mathrm{Harm}(k,l)).$$

(ii) X を $\mathcal{S}$-コードとするとき, 次が成立つ:

$$|X| \leq \sum_{(k,l)\in\mathcal{S}} \dim(\mathrm{Harm}(k,l)).$$

また次の定理は lower set $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ の元によってきまるので複素球面における relative bound といえる.

Theorem 5.2. *X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とし $F(x) = \sum_{k,l} f_{k,l} g_{k,l}(x)$ を $f_{0,0} > 0$ となる多項式とする.*

(i) X が $\mathcal{T}$-デザインで, $\mathcal{T}$ の元でない (k,l) に対して $f_{k,l} \le 0$, かつすべての $\alpha \in A(X)$ に対して $F(\alpha) \ge 0$ が成立つとすると,

$$|X| \ge \frac{F(1)}{f_{0,0}}.$$

(ii) すべての k,l に対して $f_{k,l} \ge 0$ が成立ち, かつすべての $\alpha \in A(X)$ に対して $F(\alpha) \le 0$ が成立つとすると,

$$|X| \le \frac{F(1)}{f_{0,0}}.$$

X が *tight design with respect to* $\mathcal{U}$ であるとは, X が $\mathcal{U}*\mathcal{U}$-デザインでかつ Theorem 5.1(i) において等号が成立するときをいう. 同様に, $\mathcal{S}$-コード X が *tight* であるとは, Theorem 5.1(ii) において等号が成立するときをいう. このとき tightness の同値条件に関する次の定理が成立する:

Theorem 5.3. *X を $\Omega(d)$ の有限部分集合とし, $\mathcal{S}$ を lower set とする. このとき次は同値である:*

(i) X は $\mathcal{S}$-コードかつ $\mathcal{S}*\mathcal{S}$-デザインである.

(ii) X は *tight* $\mathcal{S}$-コードである.

(iii) X は *tight design with respect to* $\mathcal{S}$ である.

6 Association schemes

この節では inner product から定まる二項関係がアソシエーションスキームを導く複素球面デザインについて考察する. 実球面, 射影空間上のデザインとは対照的に tight な複素球面上のデザインは必ずしもアソシエーションスキームを導くとは限らないものの, degree s に比べて lower set $\mathcal{T}$ のサイズが大きいデザインはアソシエーションスキームを導くことを紹介する.

まずはじめにアソシエーションスキームを定義する. 詳しくは [2] を参照されたい. X を空でない有限集合とし, $0 \le i \le s$ に対して R_i を空でない X 上の二項関係とする. R_i の隣接行列 A_i とは行, 列ともに X で添え字付けられた正方行列で $(x,y) \in R_i$ のとき $(A_i)_{xy} = 1$, それ以外のとき $(A_i)_{xy} = 0$ となるものである. このとき, 有限集合とそれ上の二項関係の組 $(X, \{R_i\}_{i=0}^{s})$ がアソシエーションスキームであるとは次の条件を満たすときをいう:

(i) A_0 は単位行列.

(ii) $\sum_{i=0}^{s} A_i = J$, 但し J はすべての成分が 1 の行列である.

(iii) 任意の i に対してある i' が存在して $A_i^T = A_{i'}$.

(iv) 任意の $i,j \in \{0,1,\ldots,s\}$ に対して $A_iA_j \in \mathrm{Span}(A_0, A_1, \ldots, As)$.

(v) 任意の i,j に対して $A_iA_j = A_jA_i$.

アソシエーションスキームが対称であるとはすべての$1 \leq i \leq s$に対して$i' = i$が成立つときをいい、そうでないときに非対称という.

$\mathbb{C}$上で$A_0, A_1, \ldots, A_s$により生成される代数$\mathcal{A}$を隣接代数という. 隣接代数は可換かつ半単純であるので原始冪等元からなる基底$\{E_0 = \frac{1}{|X|}J, E_1, \ldots, E_s\}$が唯一つ存在し, 二種類の基底間の変換行列$P$, Qを次で定義する:

$$A_i = \sum_{j=0}^{s} P_{ji}E_j, \quad E_j = \frac{1}{|X|}\sum_{i=0}^{s} Q_{ij}A_i.$$

P, Qをそれぞれ第一, 第二固有行列という. 隣接代数は通常の行列の積だけでなく, 行列の各成分毎の積$\circ$についても閉じている. 基底$\{E_0, E_1, \ldots, E_s\}$と積$\circ$から定まるクライン数$q_{i,j}^k$を次で定義する:

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{|X|}\sum_{k=0}^{s} q_{i,j}^k E_k.$$

以下, Xを$\Omega(d)$の有限部分集合とし, その inner product set を$A(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$とする. 更に$\alpha_0 = 1$とおく. 各$0 \leq i \leq s$に対して, X上の二項関係R_iを$x^*y = \alpha_i$となる(x, y)からなる集合とし, A_iをR_iの隣接行列とする. このとき$\{A_0, A_1, \ldots, A_s\}$は上の条件 (i) から (iii) までを満たすことは明らかである. 各$x, y \in X$, $1 \leq i, j \leq s$に対して交差数を次で定義する:

$$p_{i,j}(x, y) = |\{z \in X : x^*z = \alpha_i, z^*y = \alpha_j\}|.$$

交差数$p_{i,j}(x, y)$がi, jおよびx^*yのみで決まり (x, yの取り方に依らない), 更に$p_{i,j}(x, y) = p_{j,i}(x, y)$が任意の$i, j$について成立つとき, Xと内積から定まる二項関係はアソシエーションスキームとなる.

各$(k, l) \in \mathbb{N}^2$に対し, 特性行列$H_{k,l}$を用いて$F_{k,l} = \frac{1}{|X|}H_{k,l}H_{k,l}^*$を定義する. このとき加法公式により$F_{k,l} = \frac{1}{|X|}\sum_{i=0}^{s} g_{k,l}(\alpha_i)A_i$が成立つ. 次の定理はデザインとアソシエーションスキームを結び付ける非常に興味深い定理といえる.

Theorem 6.1. *$\mathcal{U}$を lowe set とし, Xを degree sの$\mathcal{U} * \mathcal{U}$-デザインとする. このとき次が成立する:*

(1) $|\mathcal{U}| \leq s + 1$.

(2) もし$s \leq |\mathcal{U}|$とすると, Xと内積から定まる二項関係はアソシエーションスキームになる.

(3) $|\mathcal{U}| = s + 1$のとき, Xは *tight design with respect to* $\mathcal{U}$となる.

この定理の多くは Martin[10] に依っている. Martin[10] ではクラスがsの対称なアソシエーションスキームにおいて, 添え字の集合$\{0, 1, \ldots, s\}$が半順序集合のときに Delsarte $\mathcal{T}$-デザインを考察している. 実球面デザインがQ-多項式スキームにおけるデザインの類似と思うと, 複素球面デザインは上のようなアソシエーションスキームにおけるデザインの類似と思うことが出来る.

Theorem 6.1(ii) の仮定を満たさない複素球面デザインもアソシエーションスキームを導く例は幾つか知られている. それらの複素球面デザインで次の定理で説明がつくものも多い.

Theorem 6.2. *X を $\mathcal{T}$-デザインとし, その inner product set を $A(X)=\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$ とする. 次の条件が成立つとする:*

(i) ある lower set $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}$ が存在して $\mathcal{U}*\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$ が成立つ;

(ii) ある集合が存在して $I\subseteq\{1,2,\dots,s\}$, $|I|=|\mathcal{U}|$ かつ交差数 $p_{i,j}(x,y)$ が i,j,x^*y のみで決まり, $p_{i,j}(x,y)=p_{j,i}(x,y)$ が任意の $(i,j)\in\{1,\dots,s\}\times\{1,\dots,s\}\setminus I\times I$ に対して成立つ;

(iii) 行列 $G=(g_{k,l}(\alpha_i))_{\substack{i\in I\\(k,l)\in\mathcal{U}}}$ は正則である.

このとき X と内積から定まる二項関係はアソシエーションスキームとなる.

Calderbank-Cameron-Kantor-Seidel[3] によって構成された $\mathbb{Z}_4$-Kerdock code から得られる complex MUB に対して Theorem 6.2 を適用することでクラスが 8 の非対称なアソシエーションスキームが得られる. ちなみに $\mathbb{Z}_2$-Kerdock code から得られる real MUB, 一般に real MUB からはクラスが 4 の対称なアソシエーションスキームが得られることが [1], [9] で示されている.

これまではデザインから得られるアソシエーションスキームについて焦点を合わせてきたが, 以下ではアソシエーションスキームを原始冪等元を使って複素単位球面に埋め込んで得られるデザインについて考察する. 非対称アソシエーションスキーム $(X,\{R_i\}_{i=0}^s)$ に対して原始冪等元 E_1 で $E_1^T\neq E_1$ となるものを固定しておく. そのランクを d とする. E_1 は半正定値行列であるので, サイズが $|X|\times d$ の行列 U が存在して $\frac{d}{|X|}E_1=UU^*$ とかける. このとき $x\mapsto\tilde{x}=e_xU$ により, $\Omega(d)$ の有限部分集合 $\tilde{X}=\{\tilde{x}:x\in X\}$ が得られ, 次の性質を持つことがわかる:

- もし E_1 が重複する列を持たなければ, $|X|=|\tilde{X}|$.
- $(x,y)\in R_i$ ならば $x^*y=\frac{Q_{i1}}{d}$.

このとき $\tilde{X}$ について次が成立つ

Theorem 6.3. *$(X,\{R_i\}_{i=0}^s)$, $\tilde{X}$ を上の通りとし, $\mathcal{T}$ を lower set とする. このとき次の条件は同値である:*

(1) $\tilde{X}$ が $\mathcal{T}$-デザインである.

(2) 各 $(i,j)\in\mathcal{T}$ に対して, 次が成立つ:

$$\sum_{l_0,\dots,l_i,h_0,\dots,h_j=0}^{s} q_{0,0}^{l_0}q_{1,l_0}^{l_1}\cdots q_{1,l_{i-1}}^{l_i}q_{0,0}^{h_0}q_{1,h_0}^{h_1}\cdots q_{1,h_{j-1}}^{h_j}q_{l_i,\widehat{h_j}}^{0}=\begin{cases}\frac{d^{2i}}{\binom{d+i-1}{i}} & \textit{if } i=j,\\ 0 & \textit{if } i\neq j.\end{cases}$$

この定理から直ちに次が得られる.

Corollary 6.4. *$(X,\{R_i\}_{i=0}^s)$, $\tilde{X}$ は Theorem 6.3 の通りとし, $\tilde{X}$ を $\mathcal{T}$-デザインとする. 更に $E_1^T\neq E_1$ を仮定しておく. このとき次が成立つ:*

(1) $\mathcal{T}$ は $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i+j \leq 2\}$ を含む.

(2) $(3,0) \in \mathcal{T}$ であることは $q_{1,1}^{\hat{1}} = 0$ と同値である.

(3) $(2,1) \in \mathcal{T}$ であることは $q_{1,1}^{1} = 0$ と同値である.

重複した列を持たない対称な原始冪等元によりアソシエーションスキームは実球面に埋め込まれることも知られている. そのときには埋め込まれた像は常に 2-デザインであり, 3-デザインとなることの必要十分条件は $q_{1,1}^{1} = 0$ であった. よって上の Corollary 6.4 はこのことの非対称アソシエーションスキーム, 複素球面デザインでの類似であるといえる.

7 Designs from orbits of finite subgroups of Unitary group

最後に群の軌道を用いたデザインの構成について述べておく. G をユニタリー群 $U(d)$ の有限部分群とする. G の表現 V に対して G の *stabilizer* を次で定める:

$$V^G = \{f \in V : gf = g \text{ for all } g \in G\}.$$

明らかに V^G は V の部分空間である.

次の定理により G の軌道がデザインとなるか否かは $\mathrm{Harm}(k,l)$ の stabilizer を見ればよいことが分かる.

Theorem 7.1. *$\mathcal{U}$ を lower set とし, G を $U(d)$ の有限部分群とする. このとき次は同値である:*

(i) 任意の $x \in \Omega(d)$ に対して, Gx は $\mathcal{U}$-デザインである.

(ii) $(0,0)$ でないすべての $(k,l) \in \mathcal{U}$ に対して $\mathrm{Harm}(k,l)^G = \{0\}$.

Theorem 7.1 の条件 (ii) を確かめる方法としては次の Molien 型の定理は非常に有効である.

Theorem 7.2. *G を $U(d)$ の有限部分群とする. このとき次の等式が成立つ:*

$$\sum_{k,l \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Harm}(k,l)^G) x^k y^l = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1 - xy}{\det(I - xg)\det(I - y\overline{g})}.$$

参考文献

[1] E. Bannai, E. Bannai, On antipodal spherical t-designs of degree s with $t \geq 2s-3$, arXiv:math/0802.2905v1[math.CO].

[2] E. Bannai, T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin/Cummings, Menro Park, CA, 1984.

[3] A. R. Calderbank, P. J. Cameron, W. M. Kantor, J. J. Seidel, $\mathbb{Z}_4$-Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal Euclidean line-sets, Proc. London Math. Soc.(3) 75 (1997), 436–480.

[4] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Rep. (Suppl. 10) (1973).

[5] P. Delsarte, J.M. Goethals, J.J. Seidel, Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials, Philips Res. Rep. 30 (1975) 91–105.

[6] P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geom. Dedicata 6 (1977), 363–388.

[7] S. G. Hoggar, t-designs in projective spaces. European J. Combin. 3 (1982), no. 3, 233–254.

[8] The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics, SIAM J. Appl. Math. 25 (1973), 236–246.

[9] N. LeCompte, W. J. Martin, W. Owens, On the equivalence between real mutually unbiased bases and a certain class of association schemes, European J. Combin. 31 (2010), no. 6, 1499–1512.

[10] W.J. Martin, Design systems: Combinatorial characterizations of Delsarte $\mathcal{T}$-designs via partially ordered sets, in: A. Barg, S. Litsyn (Eds.), Codes and Association Schemes, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, pp. 223–239.

[11] A. Roy, S. Suda, Complex spherical designs and codes, in preparation.